17

केन्द्रीय प्रवृति के माप
(Measures of Central Tendency)

17.01 प्रस्तावना (Introduction) :

प्रारम्भिक आंकड़ों का संकलन, वर्गीकरण, सारणीयन एवं ग्राफ द्वारा प्रदर्शित कर, इन्हें समझने के लिए सरल एवं सुगम बनाया जाता है। परन्तु जब आंकडों का तुलनात्मक अध्ययन करना हो या आंकडों से कोई निष्कर्ष निकालना हो,तो इन्हें और अधिक सरल एवं संक्षिप्त बनाना आवश्यक हो जाता है जिससे कि उनकी विशेषताओं को एक ही अंक द्वारा प्रकट किया जा सके।

उदाहरण के लिए यदि एक विद्यालय के 300 विद्यार्थियों की तुलना दूसरे विद्यालय के 500 विद्यार्थियों से करनी है, तो उनके भिन्न–भिन्न विषयों में प्राप्तांक दर्शाने वाली श्रेणियों से किसी भी निष्कर्ष पर पहुँचना आसान नहीं है। किन्तु यदि इन्हीं श्रेणियों के बजाय प्रत्येक श्रेणी से एक–एक प्रतिनिधि अंक लिया जाये तो तुलना करना आसान हो जायेगा। यह प्रतिनिधि अंक, श्रेणी के लगभग मध्य में, जहाँ श्रेणी के अधिकांश पद केन्द्रित होते हैं लिया जाता है। यह मान सम्पूर्ण श्रेणी का प्रतिनिधित्व करता है तथा इसे ''केन्द्रीय प्रवृति का माप'' कहते हैं।

17.02 केन्द्रीय प्रवृति के माप एवं माध्यों के प्रकार (Measures of Central Tendency and Types of Averages)

केन्द्रीय प्रवृति के माप तथा माध्यों को साधारणतः दो भागों में विभाजित किया जाता है :

(1) गणितीय माध्य (Mathematical Average)

- (i) समान्तर माध्य अथवा औसत (Arithmetic Mean or Average) [AM]
- (ii) गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean) [GM]
- (iii) हरात्मक माध्य (Harmonic Mean) [HM]

(2) स्थिति सम्बन्धी माध्य (Average of Position)

- (i) माध्यक (Median)
- (ii) बहुलक (Mode)

यहाँ हम माध्यमिक स्तर पर केवल समान्तर माध्य (जिसे सामान्यतः केवल माध्य कहकर भी प्रकट करते हैं) माध्यक तथा बहुलक के सरल प्रश्नों पर ही विचार करेंगे।

17.03 समान्तर माध्य (Arithmetic Mean)

प्रारम्भिक आँकड़ों से समान्तर माध्य ज्ञात करना (व्यक्तिगत श्रेणी) इस प्रकार के आँकड़ों से समान्तर माध्य प्राप्त करने के लिए सभी आंकड़ों का योग करके उसमें कुल आँकड़ों (समंक) की संख्या का भाग दिया जाता है। इसे औसत भी कहते हैं, अर्थात्

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\text{आंकड़ों का योग}}{\text{आंकड़ों की संख्या}}$$

उदाहरण के लिए किसी विद्यालय में कक्षा दसवीं में अध्ययन करने वाले 10 छात्रों के गणित विषय में प्राप्तांक क्रमशः 7, 8, 5, 6, 7, 8, 9, 4, 5, 6 अंक है तो प्राप्तांकों का औसत

$$= \frac{\text{प्राप्तांकों का योग (आंकड़ों का योग)}}{\text{छात्रों की संख्या (आंकड़ों की संख्या)}}$$

$$= \frac{7+8+5+6+7+8+9+4+5+6}{10}$$

$$= \frac{65}{10} = 6 \cdot 5 \text{ अंक}$$

यदि किसी चर के मान क्रमशः $x_1, x_2, \ldots, x_n$ हों, तो

$$\text{उनका समान्तर माध्य } (\bar{x}) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

टिप्पणी : Σ ग्रीक वर्णमाला का अक्षर है तथा इसे **'सिग्मा'** उच्चारित करते हैं तथा गणित में इसे योग की प्रक्रिया दिखाने के लिये प्रयोग में लाया जाता है। जैसे $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ को प्रकट करता है। अतः

$$\sum_{i=1}^{25} y_i = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{25}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. एक विद्यालय में कार्यरत प्रधानाध्यापक समेत 5 कर्मचारियों का वेतन क्रमशः ₹ 8000, ₹ 5000, ₹ 4000, ₹ 2500, ₹ 1500 मासिक है। विद्यालय में कार्यरत कर्मचारियों का औसत मासिक वेतन ज्ञात कीजिए।

हलः औसत मासिक वेतन $= \frac{8000 + 5000 + 4000 + 2500 + 1500}{5}$

$$= \frac{21000}{5} = 4200$$

अतः कर्मचारियों का औसत मासिक वेतन = ₹ 4200

उदाहरण-2. प्रथम दस विषम संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हलः प्रथम दस विषम संख्याएँ क्रमशः $1, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19$ हैं।

अतः समान्तर माध्य $(\bar{x}) = \frac{1+3+5+7+9+11+13+15+17+19}{10}$

$$= \frac{100}{10} = 10$$

उदाहरण-3. आठ क्रमागत विषम संख्याओं का औसत 16 है, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि प्रथम विषम संख्या x है, अतः क्रमागत आठ विषम संख्याएँ होंगी

$$x, x+2, x+4, x+6, x+8, x+10, x+12, x+14$$

आठों संख्याओं का औसत

$$= \frac{(x)+(x+2)+(x+4)+(x+6)+(x+8)+(x+10)+(x+12)+(x+14)}{8}$$

$$= \frac{8x+2+4+6+8+10+12+14}{8} = \frac{8x+56}{8}$$

अतः $\frac{8x+56}{8} = 16$ या $8x + 56 = 128$ या $x = 9$

अतः अभीष्ट क्रमागत विषम संख्याएँ $9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23$ हैं।

17.04 समान्तर माध्य के गुण–दोष (Merits, Demerits of Arithmetic Mean) :

गुण (Merits) :

1. इसकी गणना करना सरल है।
2. यह सभी पदों पर आधारित है।
3. अन्य सांख्यिकीय विश्लेषण में भी इसका प्रयोग होता है।
4. यह माध्य निश्चित और सदा एक ही होता है।
5. इसकी शुद्धता की जाँच सम्भव है।
6. इसके मान में स्थिरता रहती है।

दोष (Demerits) :

1. कभी–कभी इसके मान के गणन में ऐसी राशि आ सकती हैं जो प्रकृति के अनुसार संभव नहीं हो जैसे परिवार के सदस्यों की संख्या 3·8 या 5·6 होना।
2. किसी भी एक मूल्य के नहीं होने पर गणना संभव नहीं है।
3. चरम मानों (extreme values) का अत्यधिक प्रभाव पड़ता है।
4. इस माध्य का निर्धारण अवलोकन द्वारा सम्भव नहीं है।

प्रश्नमाला 17.1

1. यदि एक कक्षा के गणित विषय में दस छात्रों के प्राप्तांक 52, 75, 40, 70, 43, 40, 65, 35, 48, 52 हों, तो समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।
2. एक विद्यालय के सहायक कर्मचारियों का मासिक वेतन रुपयों में 1720, 1750, 1760 तथा 1710 है, तो समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।
3. यदि 3, 4, 8, 5, x, 3, 2,1 अंकों का समान्तर माध्य 4 हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।
4. क्रिकेट के एक खिलाड़ी ने 10 पारियों में क्रमशः 60, 62, 56, 64, 0, 57, 33, 27, 9 और 71 रन बनाए। उसके इन पारियों के रनों का औसत ज्ञात कीजिए।
5. एक मासिक परीक्षा में 10 विद्यार्थियों के द्वारा अंग्रेजी में प्राप्त निम्न अंकों से समान्तर माध्य की गणना कीजिए –

अनुक्रमांक :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
प्राप्तांक :	30	28	32	12	18	20	25	15	26	14

6. एक विद्यालय के पुस्तकालय से 10 दिन में छात्रों को दी गई पुस्तकों की संख्या निम्नलिखित है –

   300 405 455 489 375 280 418 502 300 476

   प्रतिदिन दी गई पुस्तकों की औसत संख्या ज्ञात कीजिए।
7. एक कक्षा के वर्ग A के 25 छात्रों का औसत भार 51 किग्रा है, जबकि वर्ग B के 35 छात्रों का औसत भार 54 किग्रा है। इस कक्षा के कुल 60 छात्रों के औसत भार की गणना कीजिए।
8. पाँच संख्याओं का औसत 18 है। यदि एक संख्या हटा दी जाती है तो औसत 16 हो जाता है। हटायी गई संख्या ज्ञात कीजिए।
9. 13 संख्याओं का माध्य 24 है। यदि प्रत्येक संख्या में 3 जोड़ दिया जाय, तो नए माध्य में क्या परिवर्तन आयेगा ?
10. एक विद्यालय के पाँच कर्मचारियों का औसत मासिक वेतन ₹ 3000 है। एक कर्मचारी के सेवानिवृत होने पर शेष कर्मचारियों का औसत मासिक वेतन ₹ 3200 हो जाता है। सेवानिवृत कर्मचारी का, सेवा निवृति के समय कितना वेतन था ?

17.05 असंतत श्रेणी या असंतत बारम्बारता बंटन से समान्तर माध्य (Arithmetic Average from Discrete Series or Discrete Frequency Distribution)

माना कि चर x के n मानों का बारम्बारता बंटन निम्न प्रकार है –

चर x के मान :	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
बारम्बारता f :	f_1	f_2	f_3	$\cdots$	f_n

बंटन से यह स्पष्ट है कि चर राशि x के कुल n मानों में से x_1, f_1 बार; x_2, f_2 बार; $\cdots$, x_n, f_n बार मान प्राप्त करते हैं। अतः

चर x का औसत या समान्तर माध्य $(\bar{x})$ निम्न प्रकार प्राप्त होगा –

$$\bar{x} = \frac{\overbrace{x_1 + x_1 + \cdots + x_1}^{f_1 \text{ बार}} + \overbrace{x_2 + x_2 + \cdots + x_2}^{f_2 \text{ बार}} + \cdots + \overbrace{x_n + x_n + \cdots + x_n}^{f_n \text{ बार}}}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

$$= \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i\, x_i, \quad \text{जहाँ} \quad \sum_{i=1}^{n} f_i = n = \text{कुल मानों की संख्या}$$

क्रिया पद (Working steps) :

पद I. सबसे पहले बारम्बारता बंटन से बारम्बारता सारणी इस प्रकार बनाते हैं कि पहला स्तम्भ चर x के मानों x_i का तथा दूसरा स्तम्भ चर मानों की बारम्बारता f_i का हो।

पद II. तीसरा स्तम्भ x_i तथा f_i के गुणनफल $f_i x_i$ का बनायेंगे।

पद III. दूसरे स्तम्भ के योग को $\sum f_i$ तथा तीसरे स्तम्भ के योग को $\sum f_i x_i$ से दर्शाने पर

समान्तर माध्य $(\bar{x}) = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

अतः समान्तर माध्य की गणना हेतु सारणी निम्न प्रकार बनायी जाती है :

समान्तर माध्य की गणना

x_i	f_i	$f_i x_i$
x_1	f_1	$f_1 x_1$
x_2	f_2	$f_2 x_2$
x_3	f_3	$f_3 x_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n	$f_n x_n$
	$\sum f_i$	$\sum f_i x_i$

माध्य $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

टिप्पणी : x के मान को x_i तथा इसकी सम्बन्धित बारम्बारता को f_i से दर्शाते हैं। x के औसत मान को $\bar{x}$ से निरूपित करते हैं।

उदाहरण : निम्न बारम्बारता बंटन से माध्य की गणना कीजिए –

x:	5	6	7	8	9	10	11
f:	5	8	9	12	6	6	4

हल: **समान्तर माध्य की गणना**

x_i	f_i	$f_i x_i$
5	5	25
6	8	48
7	9	63
8	12	96
9	6	54
10	6	60
11	4	44
	$\sum f_i = 50$	$\sum f_i \, x_i = 390$

अतः समान्तर माध्य $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

$$= \frac{390}{50} = 7 \cdot 8$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्न बारम्बारता बंटन का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए:

x	1	2	3	4	5	6
f	2	5	6	4	2	2

हल: **समान्तर माध्य की गणना**

x_i	f_i	$f_i x_i$
1	2	2
2	5	10
3	6	18
4	4	16
5	2	10
6	2	12
	$\sum f_i = 21$	$\sum f_i x_i = 68$

अतः समान्तर माध्य $(\bar{x}) = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{68}{21} = 3 \cdot 238$

उदाहरण-2. एक कारखाने में 50 अधिकारियों का दैनिक वेतन निम्न प्रकार है–

वेतन (रु. में) x:	450	475	500	525	550
अधिकारियों की संख्या f:	12	13	7	10	8

इनके वेतन का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल:

x_i	f_i	$f_i x_i$
450	12	5400
475	13	6175
500	7	3500
525	10	5250
550	8	4400
	$\sum f_i = 50$	$\sum f_i x_i = 24725$

अतः अभीष्ट समान्तर माध्य $(\bar{x}) = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

$$= \frac{24725}{50}$$

$$= ₹494\cdot5$$

प्रश्नमाला 17.2

निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए (प्रश्न 1–4) :

1.

x:	3	5	8	11
f:	2	4	5	3

2.

x:	2	5	7	9	11
f:	1	5	4	7	3

3.

x:	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6
f:	30	60	20	40	10	50

4.

x:	0·1	0·3	0·5	0·7	0·89
f:	7	8	10	15	10

5. एक सौ परिवारों में बच्चों की संख्या निम्न प्रकार है –

बच्चों की संख्या	1	2	3	4	5	6
परिवारों की संख्या	45	25	19	8	2	1

इनका समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

6. एक कक्षा में छात्रों के भार निम्न सारणी में दिए गए हैं –

भार (किग्रा में)	20	21	22	23	24	25	26	27	28
छात्रों की संख्या	1	2	6	7	4	2	3	2	3

इनका समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

7. यदि निम्न बंटन का माध्य $7 \cdot 5$ हो, तो P का मान ज्ञात कीजिए।

$x:$	3	5	7	9	11	13
$f:$	6	8	15	P	8	4

8. यदि निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य $1{\cdot}46$ हो, तो अज्ञात बारम्बारताएं ज्ञात कीजिए।

$x:$	0	1	2	3	4	5	योग
$f:$	46	$\cdots$	$\cdots$	25	10	5	200

17.06 वर्गीकृत (समूहित) बारम्बारता बंटन से समान्तर माध्य (Arithmetic mean from grouped frequency distribution)

इस प्रकार के बारम्बारता बंटन में चर का मान अन्तरालों में विभाजित होता है। उदाहरण के लिए निम्न बारम्बारता बंटन पर विचार करेंगे –

प्राप्तांक (x)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
छात्रों की संख्या (f)	5	8	20	14	3

यहाँ एक वर्ग अन्तराल 10-20 की बारम्बारता 8 है अर्थात् 10 से लगाकर 20 से कम तक x के 8 मान हैं। जब प्रारम्भिक आंकड़ों से वर्गीकृत बारम्बारता बंटन तैयार कर लेते हैं तो फिर बंटन देखकर उन आंकड़ों के बारे में अनुमान लगाना असम्भव हो जाता है। जैसे यदि x के मान 10, 11, 12, 17, 17, 18, 19, 19·5, हैं या 11, 12, 13, 14, 15, 15, 17, 19 तो प्रत्येक स्थिति में वर्ग अन्तराल 10-20 ही होगा जिसकी बारम्बारता 8 है।

अतः सुविधा एवं सरलता हेतु, युक्तिसंगत यह माना जाता है कि प्रत्येक अन्तराल के माध्य को चर x का मान तथा संगत अन्तराल की बारम्बारता को x की बारम्बारता मानते हुए, अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन की बताई गई विधि द्वारा माध्य की गणना की जाती है जैसे

अन्तराल 10-20 के लिए $x = \dfrac{10+20}{2} = 15$ की बारम्बारता 8 है।

इस प्रकार उपर्युक्त वर्गीकृत बारम्बारता बंटन से निम्न प्रकार अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन प्राप्त करते हैं –

अन्तराल (प्राप्तांक)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
प्राप्तांक	5	15	25	35	45
बारम्बारता	5	8	20	14	3

इससे पूर्व में बताई गई विधि द्वारा निम्नानुसार माध्य प्राप्त करते है –

x_i	f_i	$f_i x_i$
5	5	25
15	8	120
25	20	500
35	14	490
45	3	135
योग	$\sum f_i = 50$	$\sum f_i x_i = 1270$

अतः अभीष्ट समान्तर माध्य $\overline{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

$= \dfrac{1270}{50}$

$= 25 \cdot 4$ अंक

प्रश्नमाला 17.3

निम्न बारम्बारता बंटन का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए : [1 से 4]

1.

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	9	12	15	10	14

2.

वर्ग	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30
बारम्बारता	6	8	10	9	7

3.

प्राप्तांक (x)	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
छात्रों की संख्या (f)	10	20	20	15	5

4.

वर्ग	$25-35$	$35-45$	$45-55$	$55-65$	$65-75$
बारम्बारता	6	10	8	12	4

5. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए –

भार (किग्रा में)	$40-50$	$50-60$	$60-70$	$70-80$	$80-90$	$90-100$
छात्रों की संख्या	10	25	28	12	10	15

6. एक फैक्ट्री में कर्मचारियों के वेतन निम्न सारणी अनुसार है –

प्रतिमाह वेतन (रुपयों में)	1000-1200	1200-1400	1400-1600
कर्मचारियों की संख्या	10	20	20
प्रतिमाह वेतन (रुपयों में)	1600-1800	1800-2000	
कर्मचारियों की संख्या	15	5	

वेतन का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

17.07 कल्पित माध्य की सहायता से समान्तर माध्य : (Arithmetic mean using assumed mean) :

यदि किसी बारम्बारता बंटन में x के मान बहुत बड़े हों, तब समान्तर माध्य की गणना कठिन हो जाती है तथा समय भी अधिक लगता है। ऐसी स्थिति में कल्पित माध्य (assumed mean) की लघु रीति से समान्तर माध्य ज्ञात करना अधिक सुविधाजनक रहता है।

क्रिया पद (Working Steps) :

पद I. सर्वप्रथम बारम्बारता सारणी इस प्रकार बनाते हैं कि पहले स्तम्भ में चर x का मान x_i तथा दूसरे स्तम्भ में इसकी बारम्बारता f_i आए।

पद II. तीसरे स्तम्भ में सुविधानुसार एक मान A से प्रत्येक चर मान x_i से विचलन लिखते हैं। यहाँ A कल्पित माध्य कहलाता है।

पद III. चौथे स्तम्भ में बारम्बारता f_i तथा विचलन d_i का गुणा $f_i d_i$ लिखते हैं।

पद IV. अब स्तम्भ 2 का योग $\sum f_i$ तथा स्तम्भ 4 का योग $\sum f_i d_i$ सम्बन्धित स्तम्भ के नीचे लिखते हैं।

पद V. सूत्र $\bar{x} = A + \frac{1}{N}\left(\sum f_i d_i\right)$, जहाँ $N = \sum f_i$ है, से समान्तर माध्य ज्ञात करते हैं।

निम्न सारणी से उपरोक्त क्रिया विधि स्पष्ट होती है –

x_i	f_i	$d_i = x_i - A$	$f_i d_i$
x_1	f_1	d_1	$f_1 d_1$
x_2	f_2	d_2	$f_2 d_2$
x_3	f_3	d_3	$f_3 d_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	f_k	d_k	$f_k d_k$
	$N = \sum f_i$		$\sum f_i d_i$

अतः समान्तर माध्य $(\bar{x}) = A + \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$$= A + \frac{1}{N}\left(\sum f_i d_i\right)$$

यदि पद II में $u_i = \dfrac{x_i - A}{h}$ से पद विचलन (step deviation) ज्ञात किया जाय, जहाँ h विचलनो का सार्व गुणनखण्ड है तो पद III के अनुसार कॉलम तीन में $f_i u_i$ अर्थात् बारम्बारता f_i तथा u_i का गुणनफल लिखेंगे। तब निम्न सूत्रानुसार माध्य ज्ञात करेंगे

$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$$

महत्वपूर्ण टिप्पणी :

(i) सामान्यतः कल्पित माध्य A, चर x के मध्य के मान को अथवा अधिकतम बारम्बारता वाले मान को लिया जाता है।

(ii) जब x के मानों में अन्तर अधिक तथा मान बड़ा हो या बारम्बारता अधिक हो तो गणितीय परिकलन सरल करने के लिये पद विचलन

$u_i = \dfrac{x_i - A}{h}$ लेकर गणना करना सुविधाजनक रहता है।

उपर्युक्त सूत्र के लिये गणना सारणी

x_i	f_i	$u_i = \dfrac{x_i - A}{h}$	$f_i u_i$
x_1	f_1	u_1	$f_1 u_1$
x_2	f_2	u_2	$f_2 u_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	f_k	u_k	$f_k u_k$
योग	$\sum f_i$		$\sum f_i u_i$

अतः समान्तर माध्य $(\bar{x}) = A + \dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

(यहाँ सामान्यतः A के मध्यमान लेने पर u_i के मान $\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ आते हैं)
आगे दिये गये उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जायेगा।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्न बारम्बारता बंटन के लिये समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए –

x	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
f	20	43	75	67	72	45	39	9	8	6

हलः सर्वप्रथम अधिकतम बारम्बारता 72 के संगत चर मान 25 को कल्पित माध्य A मानकर गणना सारणी का निर्माण करेंगे। (यहाँ $A = 25$ तथा $h = 5$)

समान्तर माध्य की गणना सारणी

चर मान x_i	बारम्बारता f_i	$u_i = \dfrac{x_i - 25}{5}$	$f_i u_i$
5	20	−4	−80
10	43	−3	−129
15	75	−2	−150
20	67	−1	−67
25	72	0	0
30	45	1	45
35	39	2	78
40	9	3	27
45	8	4	32
50	6	5	30
योग	$N = \sum f_i = 384$		$\sum f_i u_i = -214$

अतः समान्तर माध्य $(\bar{x}) = A + \left(\dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

$$= 25 + \left(\frac{-214}{384}\right) \times 5$$

$$= 25 - 2 \cdot 786 = 22 \cdot 214$$

उदाहरण-2. निम्न बारम्बारता बंटन 12 विद्यार्थियों के भारों को प्रदर्शित करता है

भार (किग्रा में)	67	70	72	73	75
विद्यार्थियों की संख्या	4	3	2	2	1

माध्य भार ज्ञात कीजिए।

हल: समान्तर माध्य हेतु गणना सारणी :–

भार (किग्रा में) x_i	विद्यार्थियों की संख्या f_i	$d_i = x_i - 72$	$f_i d_i$
67	4	-5	-20
70	3	-2	-6
72	2	0	0
73	2	1	2
75	1	3	3
योग	$N=\sum f_i$ $=12$		$\sum f_i d_i$ $=-21$

यहाँ A का मान चर x के मानों के मध्य का मान 72 लेने पर

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = A + \frac{1}{N}\left(\sum f_i d_i\right)$$

$$= 72 + \left(\frac{-21}{12}\right)$$

$$= 72 - \frac{7}{4} = 70 \cdot 25 \text{ किग्रा.}$$

अतः माध्य भार 70·25 किग्रा.

उदाहरण-3. नीचे सारणी में कुछ विशेष क्षेत्र के गाँवों की समुद्रतल से ऊँचाई दे रखी है। उस क्षेत्र की समुद्रतल से माध्य ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई (मीटर में)	200	600	1000	1400	1800	2200
गाँवों की संख्या	142	265	560	271	89	16

हल: यहाँ हम $A = 1000$ तथा $h = 400$ लेकर दोनों तरह के विचलन d_i तथा u_i की गणना करते हुए माध्य ज्ञात करेंगे।

समान्तर माध्य की गणना सारणी

ऊँचाई (मी. में) x_i	गाँवों की संख्या f_i	विचलन $d_i = x_i - 1000$	$f_i d_i$	विचलन $u_i = \dfrac{x_i - 1000}{400}$	$f_i u_i$
200	142	−800	−113600	−2	−284
600	265	−400	−106000	−1	−265
1000	560	0	0	0	0
1400	271	400	108400	1	271
1800	89	800	71200	2	178
2200	16	1200	19200	3	48
	$\sum f_i = 1343$		$\sum f_i d_i = -20800$		$\sum f_i u_i = -52$

अतः (i) विचलन विधि से माध्य

$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

$$= 1000 + \frac{-20800}{1343}$$

$= 1000 - 15 \cdot 488$ लगभग

$= 984 \cdot 512$

(ii) पद विचलन विधि से माध्य

$$\bar{x} = A + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) h$$

$$= 1000 + \frac{-52}{1343} \times 400$$

$= 1000 - 15 \cdot 488$ लगभग

$= 984 \cdot 512$

उदाहरण-4. निम्न बारम्बारता बंटन का पद विचलन विधि से माध्य ज्ञात कीजिए –

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	7	10	15	8	10

हल: माध्य की गणना (यहाँ $A = 25$ तथा $h = 10$)

वर्गअन्तराल	x_i	f_i	$u_i = \dfrac{x_i - 25}{10}$	$f_i u_i$
0 − 10	5	7	−2	−14
10 − 20	15	10	−1	−10
20 − 30	25	15	0	0
30 − 40	35	8	1	8
40 − 50	45	10	2	20
		$\sum f_i = 50$		$\sum f_i u_i = 4$

$$\text{अतः माध्य} = A + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$$

$$= 25 + \left(\frac{4}{50}\right) \times 10 = 25 \cdot 8$$

प्रश्नमाला 17.4

निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य, कल्पित माध्य की सहायता से ज्ञात कीजिए –
(प्रश्न 1 से 4)

1.

x	800	820	860	900	920	980	1000
f	7	14	19	25	20	10	5

2.

भार (किग्रा में)	60	61	62	63	64	65
मजदूरों की संख्या	5	8	14	16	10	7

3.

खर्च (रुपयों में)	100-150	150-200	200-250	250-300
मजदूरों की संख्या	24	40	33	28
खर्च (रुपयों में)	300 – 350	350 – 400	400 – 450	450 – 500
मजदूरों की संख्या	30	22	16	7

4.

पानी पर खर्च (रुपयों में)	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
मकानों की संख्या	7	5	7	8	9	11
पानी पर खर्च (रुपयों में)	45 - 50	50-55	55-60	60-65	65-70	
मकानों की संख्या	7	5	4	4	3	

5. कल्पित माध्य 25 मानकर निम्न बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
f	6	10	13	7	4

6. निम्नलिखित सारणी में एक शहर में एक विशेष वर्ष में एक रोग से पीड़ित रोगियों का आयु बंटन दिया गया है। प्रति रोगी औसत आयु (वर्षों में) ज्ञात कीजिए।

आयु (वर्षों में)	5 – 14	15 – 24	25 – 34	35 – 44	45 – 54	55 – 64
रोगियों की संख्या	6	11	21	23	14	5

7. निम्न लिखित बारम्बारता बंटन से माध्य ज्ञात कीजिए –

वर्ग अन्तराल	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
बारम्बारता	10	25	28	12	10	15

17.08 माध्यक (Median) :

यदि किसी चर राशि x के n मानों को आरोही (ascending) या अवरोही (descending) क्रम में रखा जाय, तो इस श्रेणी के मध्य पद को श्रेणी की माध्यक कहेंगे। यदि पदों की संख्या विषम है तो मध्य में एक ही पद $\left(\frac{n+1}{2}\text{वां}\right)$ होगा। परन्तु यदि पदों की संख्या सम हो तो मध्य में दो पद होंगे $\left(\frac{n}{2}\text{वां व }\frac{n}{2}+1\text{ वां}\right)$ तथा माध्यक उन दोनों पदों का औसत होगी। उदाहरण के लिये कक्षा A के 9 छात्रों के प्राप्तांक 10, 15, 12, 18, 17, 18, 15, 16, 19 हैं तथा कक्षा B के 8 छात्रों के प्राप्तांक 19, 15, 18, 14, 17, 16, 15, 15 है। इनको आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर –

A :	10	12	15	15	16	17	18	18	19
B:	14	15	15	15	16	17	18	19	

A का माध्यक = मध्य पद (5वाँ पद) = 16 अंक

$$\text{B का माध्यक} = \text{मध्य पदों का औसत } \left(\frac{4\text{था पद} + 5\text{वाँ पद}}{2}\right)$$

$$= \frac{15+16}{2} = 15\cdot 5 \text{ अंक}$$

17.09 अवर्गीकृत या व्यक्तिगत श्रेणी से माध्यक (Median from ungrouped or individual series)

क्रिया पद (Working steps) :

पद I. चर x के n मानों को आरोही क्रम या अवरोही क्रम जैसे $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ में लिखना।

पद II. अब निम्न सूत्र के अनुसार माध्यक ज्ञात कीजिए –

$$\text{माध्यक } (M) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}\text{वाँ पद अर्थात् } x_{\frac{n+1}{2}}, \text{ यदि } n \text{ विषम संख्या हो} \\ \frac{n}{2}\text{वें व } \frac{n}{2}+1\text{ वें पदों का औसत अर्थात् } \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}, \text{ यदि } n \text{ सम संख्या हो} \end{cases}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्न आंकडों से माध्यक ज्ञात कीजिए।

25, 34, 31, 23, 22, 26, 35, 28, 20, 32

हल: दिये गए ऑकडों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

क्र. सं.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
चर का मान (x)	20	22	23	25	26	28	31	32	34	35

यहाँ कुल पद $(n) = 10$ (सम संख्या)

$$\text{अतः माध्यक } (M) = \frac{\frac{10}{2}\text{वां पद } \left(\frac{10}{2}+1\right)\text{वां पद}}{2}$$

$$= \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{26+28}{2} = 27$$

उदाहरण-2. निम्न चर मानों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

37, 31, 42, 43, 46, 25, 39, 45, 32

हल: दिए गए आँकडों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
25	31	32	37	39	42	43	45	46

क्योंकि x के 9 मान क्रमशः आरोही क्रम में $x_1, x_2, \ldots, x_9$ है

अतः माध्यक $(M) = \left(\frac{9+1}{2}\right)$ वाँ पद $= x_5 = 39$

उदाहरण-3. आरोही क्रम में व्यवस्थित चर मान (x) निम्नानुसार है।

8 11 12 16 $16+x$ 20 25 30

यदि माध्यक 18 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ कुल चर मान 8 है अतः मध्य में दो पद क्रमशः 16 व $16+x$ है।

अतः माध्यक $= \frac{(16)+(16+x)}{2} = 18$ (दिया हुआ)

या $32+x=36$ या $x=4$

अतः x का मान $=4$

17.10 अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन से माध्यक (Median from ungrouped frequency distribution)

अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन से माध्यक ज्ञात करने की क्रिया विधि निम्नानुसार है –

क्रिया पद (Working steps) :

पद I. संचयी बारम्बारता सारणी (cummulative frequency table) तैयार करना।

पद II. $N/2$ का मान ज्ञात करना, जहाँ $N = \sum f_i$

पद III. $N/2$ से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता वाला चर मान माध्यक होगी।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्न बारम्बारता बंटन से माध्यक ज्ञात कीजिए।

x:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f:	8	10	11	16	20	25	15	9	6

हल: माध्यक के लिए गणना

x_i	f_i	$c.f.$
1	8	8
2	10	18
3	11	29
4	16	45
5	20	65
6	25	90
7	15	105
8	9	114
9	6	120

$N=120$

यहाँ $\frac{N}{2} = 60.$

वह पद जिसकी संचयी बारम्बारता 60 से ठीक अधिक अर्थात् संचयी बारम्बारता 65 के संगत पद मान 5 हैं।
अतः माध्यक = 5

प्रश्नमाला 17.6

1. निम्न चर मानों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

   25, 34, 33, 13, 20, 26, 36, 28, 19, 34

2. निम्न आंकडों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

   19, 25, 59, 48, 35, 31, 30, 32, 51.

   यदि 25 को 52 से बदल दिया जाय, तो नया माध्यक का मान ज्ञात कीजिए।

3. एक कक्षा के विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्न सारणी अनुसार दिए गए हैं, माध्यक ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	15	20	25	30	35	40	45	50
विद्यार्थियों की संख्या	2	8	16	26	20	16	7	4

4. एक सौ परिवारों में बच्चों की संख्या निम्न प्रकार है, इनका माध्यक ज्ञात कीजिए।

बच्चों की संख्या	0	1	2	3	4	5	6
परिवारों की संख्या	10	35	27	17	6	3	2

5. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्यक ज्ञात कीजिए –

x	20	25	30	35	40	45	50	55
f	14	28	33	30	20	15	13	7

17.11 वर्गीकृत बारम्बारता बंटन से माध्यक
(Median from grouped frequency distribution)

वर्गीकृत बारम्बारता बंटन से माध्यक ज्ञात करने के लिए निम्न क्रिया पद है :

पद I. संचयी बारम्बारता सारणी तैयार करना।

पद II. $N/2$ ज्ञात कर ठीक अधिक संचयी बारम्बारता वाले वर्ग अन्तराल को ज्ञात करना।

पद III. अब इस वर्ग अन्तराल के लिए निम्न सूत्र की सहायता से माध्यक ज्ञात करना।

माध्यक $(M) = \ell + \left(\frac{\frac{N}{2} - C}{f_i} \right) \times h$

जहाँ ℓ = माध्यक वर्ग निम्न सीमा

N = कुल बारम्बारता $\left(\sum f_i \right)$

C = माध्यक वर्ग से पूर्व वर्ग की संचयी बारम्बारता

h = माध्यक वर्ग का अन्तराल

f = माध्यक वर्ग की बारम्बारता

निम्न उदाहरण से यह विधि स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण-1. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्यक ज्ञात कीजिए।

वर्ग	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
f_i	6	20	44	26	3	1

हल: संचयी बारम्बारता सारणी बनाने पर

वर्ग	f_i	संचयी बारम्बारता (c)
10-25	6	6
25-40	20	26
40-55	44	70
55-70	26	96
70-85	3	99
85-100	1	100

$N = 100$

यहाँ $\frac{N}{2} = 50$ अतः माध्यक वर्ग अंतराल "$40-55$" है तथा

यहाँ संगत $\ell = 40,\ C = 26,\ h = 15$ व $f = 44.$

$$\therefore \quad \text{माध्यक } (M) = \ell + \frac{\left(\frac{N}{2} - c\right)}{f} \times h$$

$$= 40 + \frac{(50-26)}{44} \times h$$

$$= 40 + \frac{24}{44} \times 15$$

$$= 48 \cdot 18$$

अतः माध्यक $48 \cdot 18$ है।

17.12 माध्यक के गुण व दोष (Merits and Demerits of Median) :

माध्यक के गुण :

(i) यह गुणात्मक विशेषताओं के अध्ययन में श्रेष्ठ है।

(ii) माध्यक ज्ञात करना सरल व सुविधाजनक है। कभी–कभी यह निरीक्षण मात्र से ज्ञात किया जा सकता है।

(iii) इसकी गणना में संपूर्ण आंकड़ों की आवश्यकता नहीं होती है।

(iv) माध्यक सदैव निश्चित एवं स्पष्ट होती है।

(v) इस पर चरम मानों का प्रभाव नहीं पड़ता, जबकि माध्य में अधिक प्रभाव पड़ता है।

माध्यक के दोष :

(i) मानों का अनियमित वितरण होने पर माध्यक प्रतिनिधि अंक प्रस्तुत नहीं करता व भ्रमपूर्ण निष्कर्ष निकलता है। जैसे– एक विद्यार्थी को क्रमशः 5 विषयों में 40, 30, 5, 3, 2 अंक प्राप्त हुए। यहाँ माध्यक 5 हुई जो आंकड़ों का उचित प्रतिनिधित्व नहीं करती है।

(ii) जब चरम मानों को समान महत्व देना हो तो यह केन्द्रीय प्रवृति का मान अनुपयुक्त है।

(iii) इसका प्रयोग गणितीय प्रक्रियाओं में नहीं किया जा सकता है।

प्रश्नमाला 17.7

1. 100 छात्रों के प्राप्तांक निम्न सारणी में दिए गए हैं। इनसे माध्यक ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
छात्रों की संख्या	6	20	44	26	3	1

2. एक कक्षा के छात्रों के प्राप्तांक निम्न बारम्बारता बंटन में दिए हुए हैं। इनसे माध्यक ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
छात्रों की संख्या	4	28	42	20	6

निम्न बारम्बारता बंटन से माध्यक ज्ञात कीजिए। (प्र. 3 व 4)

3.

वर्ग	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40
f_i	2	6	10	17
वर्ग	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
f_i	30	15	10	10

4.

वर्ग	0 – 8	8-16	16-24	24-32	32-40	40-48
f_i	42	30	50	22	8	5

17.13 बहुलक (Mode)

किसी श्रेणी का वह मूल्य जिसकी बारम्बारता सबसे अधिक होती है, बहुलक कहलाता है। इसके पास श्रेणी के पदों के केन्द्रित होने की प्रवृति सबसे अधिक होती है।

बहुलक की गणना (Calculation of Mode)

(i) व्यक्तिगत श्रेणी या अवर्गीकृत श्रेणी से बहुलक (Mode from Individual Series or Discrete Series)

इस श्रेणी से पहले बारम्बारता बंटन सारणी तैयार करते हैं।

जिस मूल्य (समंक) की बारम्बारता सबसे अधिक होती है वही मूल्य (समंक) श्रेणी का बहुलक (Mode) कहलाता है। इसको निम्न उदाहरण की सहायता से सरलता से समझा जा सकता है –

प्राप्तांक	0	1	2	3	4	5
छात्रों की संख्या	5	8	13	5	3	2

यहाँ बारम्बारता बंटन से स्पष्ट है कि प्राप्तांक 2 की बारम्बारता सबसे अधिक 13 है, अतः बंटन का बहुलक प्राप्तांक 2 होगा।

यदि बारम्बारता का वितरण नियमित नहीं हो या सबसे अधिक बारम्बारता वाले मूल्य एक से अधिक हो, तो फिर बहुलक ज्ञात करना कठिन होता है। ऐसी स्थिति में बहुलक का निर्धारण 'समूहीकरण' (Grouping) द्वारा करना पड़ता है। यहाँ हम नियमित वितरण वाले बारम्बारता बंटन का ही अध्ययन करेंगे।

(ii) अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन से बहुलक (Mode from ungrouped frequency distribution) :

यहाँ नियमित बारम्बारता बटन से जिस पद मूल्य की बारम्बारता सबसे अधिक होती है वहीं पद मूल्य बहुलक होता है।

उदाहरणः कुछ विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्नानुसार है इनका बहुलक ज्ञात कीजिए –

प्राप्तांक	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
विद्यार्थियों की संख्या	1	5	15	16	20	19	15	8	7	3	2

हलः यहाँ प्राप्तांक 34 की बारम्बारता सबसे अधिक 20 है।

अतः बहुलक $= 34$ अंक

(iii) वर्गीकृत बारम्बारता बंटन से बहुलक (Median from grouped frequency distribution)

वर्गीकृत बारम्बारता बंटन से बहुलक निकालने के लिये निम्न क्रिया पद है –

पद I. वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के जिस वर्ग की बारम्बारता सबसे अधिक होती है, उसे बहुलक वर्ग कहते हैं। सर्व प्रथम बहुलक वर्ग को ज्ञात करते हैं।

पद II. बहुलक वर्ग के माध्यम से निम्न सूत्र का प्रयोग करते हुए बहुलक ज्ञात करते है –

$$\text{बहुलक} = \ell + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

जहाँ $\ell =$ बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

$f_1 =$ बहुलक वर्ग की बारम्बारता

$f_0 =$ बहुलक वर्ग से ठीक पूर्व वर्ग की बारम्बारता

$f_2 =$ बहुलक वर्ग के ठीक बाद के वर्ग की बारम्बारता

$h =$ बहुलक वर्ग का अन्तराल

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्न बारम्बारता बंटन से बहुलक ज्ञात कीजिए।

वर्ग	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
f_i	6	20	44	26	3	1

हलः यहाँ सबसे अधिक बारम्बारता 44, वर्ग '40-50' की है।

इस प्रकार बहुलक वर्ग $= 40 - 50$

पुनः $\ell = 40,\ f_1 = 44,\ f_0 = 20,\ f_2 = 26$ तथा $h = 15$

$$\text{सूत्र के अनुसार बहुलक} = \ell + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{44 - 20}{88 - 20 - 26}\right) \times 15 = 48 \cdot 57$$

अतः अभीष्ट बहुलक $= 48 \cdot 57$

प्रश्नमाला 17.8

1. निम्न बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए।

(i)	2	5	7	5	3	1	5	8	7	5
(ii)	2	4	6	2	6	6	7	8		
(iii)	2·5	2·5	2·1	2·5	2·7	2·8	2·5			

2. निम्न बारम्बारता बंटनों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

(i)

x	3	4	5	6	7	8
f	2	4	6	3	2	1

(ii)

x	1·1	1·2	1·3	1·4	1·5	1·6
f	20	50	80	60	15	8

3. एक गाँव के 30 परिवारों में उनके सदस्यों की संख्या निम्न सारणी के अनुसार है, इनका बहुलक ज्ञात कीजिए।

सदस्य संख्या	2	3	4	5	6	7	8
परिवारों की संख्या	1	2	4	6	10	3	5

4. एक कक्षा के 20 छात्रों की आयु वर्षो में निम्न प्रकार है।

15	16	13	14	14	13	15	14	13	13
14	12	15	14	16	13	14	14	13	15

इन्हें बारम्बारता बंटन में व्यक्त कर बहुलक ज्ञात कीजिए।

5. कुछ विद्यार्थियों के प्राप्तांक नीचे दिए हुए है, प्राप्तांकों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	10	20	30	40	50	60	70	80
विद्यार्थियों की संख्या	2	8	16	26	20	16	7	4

निम्न बारम्बारता बंटन से बहुलक ज्ञात कीजिए। [प्रश्न 6–9]

6.

वर्ग	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
बारम्बारता	3	7	16	12	9	5	3

7.

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
छात्रों की संख्या	5	12	14	10	8	6

8.

प्राप्तांक	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
छात्रों की संख्या	4	28	42	20	6

9.

ऊँचाई (सेमी में)	52-55	55-58	58-61	61-64
छात्रों की संख्या	10	20	25	10

विविध प्रश्नमाला–17

निम्न प्रश्नों के उत्तरों के चार संभावित विकल्प दिए हुए हैं। सही उत्तर वाले विकल्प का चुनाव कीजिए।

1. किसी श्रेणी का बहुलक मूल्य होता है –

(क) मध्यवर्ती मूल्य (ख) सर्वाधिक बारम्बारता वाला मूल्य

(ग) न्यूनतम बारम्बारता मूल्य (घ) सीमान्त मूल्य

2. निम्न श्रेणी का माध्यक मूल्य है –

520, 20, 340, 190, 35, 800, 1210, 50, 80

(क) 1210 (ख) 520 (ग) 190 (घ) 35

3. चार छात्रों के सांख्यिकी में प्राप्तांक 53, 75, 42, 70 है, उनके प्राप्तांकों का समान्तर माध्य है –

(क) 42 (ख) 64 (ग) 60 (घ) 56

4. एक छात्र को गणित, भौतिक विज्ञान तथा रसायन विज्ञान में क्रमशः 85, 87 तथा 83 अंक मिले। उसके इन विषयों में प्राप्तांकों का माध्य है –

(क) 86 (ख) 84 (ग) 85 (घ) $85 \cdot 5$

5. यदि $5, 7, 9, x$ का समान्तर माध्य 9 हो, तो x का मान है –

(क) 11 (ख) 15 (ग) 18 (घ) 16

6. बंटन 2, 3, 4, 7, 5, 1 का माध्यक है –

(क) 4 (ख) 7 (ग) 11 (घ) 3.5

7. बंटन 1, 3, 2, 5, 9 का माध्यक है –

(क) 3 (ख) 4 (ग) 2 (घ) 20

8. बंटन 3, 5, 7, 4, 2, 1, 4, 3, 4 का बहुलक है –

(क) 7 (ख) 4 (ग) 3 (घ) 1

9. किसी स्कूल के छात्रों की संख्या उनकी आयु के अनुसार निम्न प्रकार है –

आयु वर्षों में	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
छात्रों की संख्या	15	25	40	36	41	37	20	13	5	3

इनका बहुलक होगा –

(क) 41 (ख) 12 (ग) 3 (घ) 17

निम्न बंटनों का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए – [प्रश्न 10 से 14]

10.

x	5	6	7	8	9
f	4	8	14	11	3

11.

x	10	15	17	20	22	30	35
f	5	10	2	8	3	6	6

12.

x	19	21	23	25	27	29	31
f	13	15	16	18	16	15	13

13.

x	1	2	3	4	5	6
f	45	25	19	8	2	1

14. निम्न बारम्बारता बंटन से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए –

भार (किग्रा में)	40-44	44-48	48-52	52-56	56-60	60-64
व्यक्तियों की संख्या	5	6	5	9	3	2

निम्न बंटन की माध्यक ज्ञात कीजिए– (प्रश्न 15 – 17)

15.

x	$0 \cdot 1$	$0 \cdot 2$	$0 \cdot 3$	$0 \cdot 4$	$0 \cdot 5$	$0 \cdot 6$	$0 \cdot 7$
f	30	60	20	40	10	50	35

16.

जूतों की नाप	$4 \cdot 5$	$5 \cdot 0$	$5 \cdot 5$	$6 \cdot 0$	$6 \cdot 5$	$7 \cdot 0$	$7 \cdot 5$	$8 \cdot 0$	$8 \cdot 5$	$9 \cdot 0$
जूतों की संख्या	1	2	4	5	15	30	60	95	82	75

17. क्रिकेट की एक टीम के खिलाड़ियों द्वारा बनाए गये रनों की संख्या निम्न प्रकार है –

57, 17, 26, 91, 115, 26, 83, 41, 57, 0, 26.

इसका समान्तर माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

निम्न बारम्बारता बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए– (प्रश्न 18 – 19)

18.

वर्ग	$0-10$	$10-20$	$20-30$	$30-40$	$40-50$
बारम्बारता	4	7	13	9	3

19.

वर्ग	$0-20$	$20-40$	$40-60$	$60-80$	$80-100$
बारम्बारता	3	15	24	8	5

20. समान्तर माध्य की परिभाषा देते हुए इसके किन्हीं दो दोषों को बताइए।
21. माध्यक की प्रमुख उपयोगिता बताइए।
22. वर्गीकृत बारम्बारता बंटन से माध्यक ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. समान्तर माध्य $(\bar{x})$:

(i) व्यक्तिगत श्रेणी : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

(ii) अवर्गीकृत बंटन : $\bar{x} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$

(iii) कल्पित माध्य से : $\bar{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$ या $\bar{x} = A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

जहाँ A कल्पित माध्य, $d_i = x_i - A$ तथा $u_i = \frac{x_i - A}{h}$

2. माध्यक (M):

(i) व्यक्तिगत श्रेणी : मूल्य को आरोही क्रम या अवरोही क्रम $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ में व्यवस्थित करने पर

$$\text{माध्यक } (M) = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{यदि } n \text{ विषम संख्या हो} \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}, & \text{यदि } n \text{ सम हो} \end{cases}$$

(ii) अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन : संचयी बारम्बारता सारणी से वह मूल्य जिसकी संचयी आवृति $N/2$से ठीक बड़ी है।

(iii) वर्गीकृत बारम्बारता बंटन : वह वर्ग अन्तराल जिसकी संचयी आवृति $N/2$ से ठीक अधिक है, माध्यक का वर्ग होगा तथा

$$\text{माध्यक } (M) = \ell + \left(\frac{\frac{N}{2} - C}{f} \right) \times h$$

जहाँ $\ell =$ माध्यक वर्ग अन्तराल की निम्न सीमा

$N = \sum f_i$ अर्थात् कुल बारम्बारता

$C =$ माध्यक वर्ग से पूर्व वर्ग की संचयी बारम्बारता

$h =$ माध्यक वर्ग का अन्तराल

$f =$ माध्यक वर्ग की बारम्बारता

3. बहुलक :

(i) व्यक्तिगत श्रेणी : वह पद मूल्य जिसकी बारम्बारता सबसे अधिक है।

(ii) अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन : सबसे अधिक बारम्बारता वाला पद मूल्य।

(iii) वर्गीकृत बारम्बारता बंटन : सबसे अधिक बारम्बारता वाला वर्ग, बहुलक वर्ग कहलाता है

तथा बहुलक $(z) = \ell + \left(\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$

जहाँ ℓ = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

f_1 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता

f_0 = बहुलक वर्ग से ठीक पूर्व वर्ग की बारम्बारता

f_2 = बहुलक वर्ग के ठीक बाद के वर्ग की बारम्बारता

h = बहुलक वर्ग का अन्तराल

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 17.1

1. 52 अंक 2. 1735 रु. 3. 6 4. 43.9 रन 5. 22 अंक 6. 400 पुस्तके
7. 52.75 किग्रा 8. 26 9. माध्य 24 +3 10. 2200 रु.

प्रश्नमाला 17.2

1. 7·07 2. 7·55 3. 0·34 4. 0·55 5. 2 6. 23·9 7. 3 8. 76 व 38

प्रश्नमाला 17.3

1. 26·33 लगभग 2. 15·45 3. 145·71 4. 49·5 5. 68·2 6. 1457·14

प्रश्नमाला 17.4

1. 891·2 2. 62·65 3. 266·25 4. 39·57 5. 23·25 6. 34·87 7. 68·2

प्रश्नमाला 17.5

1. 56·875 2. 86·5 व 87·25 3. 82 4. 49·67

प्रश्नमाला 17.6

1. 27 2. 32 व 35 3. 30 4. 2 5. 35

प्रश्नमाला 17.7

1. 45·45 2. 24·29 3. 45 4. 17·04

प्रश्नमाला 17.8

1. (i) 5 (ii) 6 (iii) 2·5 2. (i) 5 (ii) 1·3 3. 6 4. 14 5. 40
6. 23·46 7. 23·33 8. 43.89 9. 58·75

विविध प्रश्नमाला—17

1. (ख) 2. (ग) 3. (ग) 4. (ग) 5. (ख) 6. (घ) 7. (क)
8. (ख) 9. (ख) 10. 7·025 11. 21·25 12. 25 13. 2 14. 50·67
15. 0.4 16. 8 17. 49, 41 व 26 18. 26 19. 47·2

❑